

УДК 535.4

А.В. Безуглий, канд. фіз.-мат. наук
Харківська національна академія
міського господарства

ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА НА НЕСКІНЧЕНІЙ ДВОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ АТОМІВ

Постановка задачі:

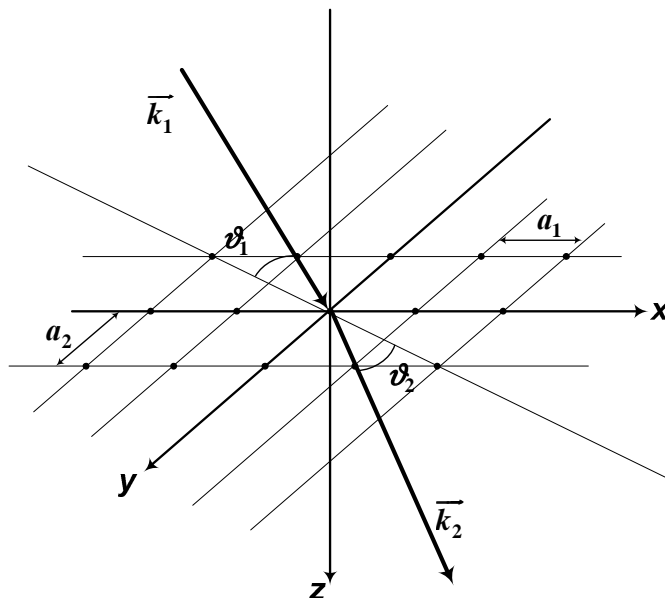


Рис. 1

Будемо вважати, що з боку негативних значень осі Z , під кутом $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right)$ на двовимірну ґратку атомів розташовану в площині HOY падає монохроматичний пучок фотонів (рис. 1). Сталу ґратки в напрямку осі X позначимо a_1 , в напрямку осі Y - a_2 .

Будемо також вважати, що розсіяння фотонів буде відбуватися внаслідок їх пружної взаємодії з вільними електронами, які рухаються в періодичному полі ґратки.

Основні співвідношення

При описанні квантових станів електронів будемо базуватися на одновимірній моделі Кроніґа і Пенні [1]. Згідно з зазначеною моделлю, ланцюжку атомів співставляється періодична послідовність прямокутних потенціальних бар'єрів висотою V_0 та шириною b , розташованих з періодом a (рис. 2). Тоді ширина потенціальної ями дорівнює $a - b$. Виберемо початок координат з правого боку одного з бар'єрів. Розв'язуючи задачу про рух електрона, Кроніґ і Пенні отримали трансцендентне рівняння

$$\operatorname{ch} \beta b \cos \alpha(a-b) + \left[(\beta^2 - \alpha^2) / 2\alpha\beta \right] \operatorname{sh} \beta \sin \alpha(a-b) = \cos ka \quad (1)$$

$$\text{де } \alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \beta^2 = \frac{(V_0 - E)}{\hbar^2};$$

E - енергія електрона;

m - маса електрона;

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$; h - стала Планка.

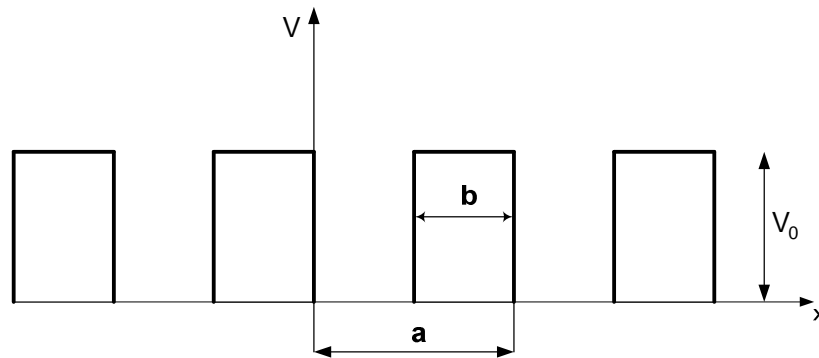


Рис. 2

Величини α , β - це сталі розповсюдження хвилі де-Бройля відповідно в ямі та в бар'єрі, k - стала розповсюдження електрона в періодичній системі бар'єрів і ям.

Оскільки k - величина дійсна, той $\cos ka$ теж дійсна величина, а тому рівняння (1) має розв'язок, коли його ліва частина не перевищує за модулем одиницю, тобто, позначивши її через F , можна записати $-1 \leq F \leq 1$.

Розв'язок рівняння (1) можна отримати графічно, побудувавши графіки функції F та $\cos ka$. Коренями рівняння (1) будуть точки перетину цих двох функцій. На рис. 3 приведено для порівняння графіки для двох випадків, які відрізняються тільки висотою бар'єрів V_0 , всі інші параметри мають однакові значення.

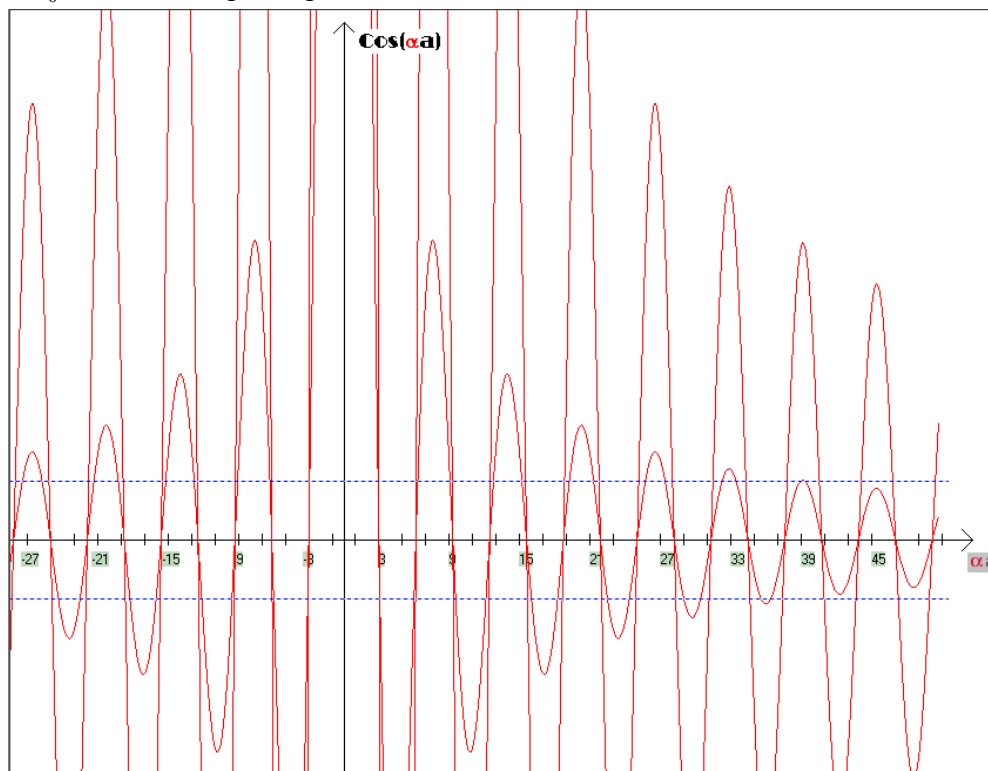


Рис. 3

З порівняння цих двох графіків видно, що у випадку досить вузьких і досить високих бар'єрів смуги, які визначають дозволені значення енергії – дозволені зони звужуються. На рис. 3,б графік функції F перетинає смугу значень $\cos \theta$ від $+1$ до -1 майже вертикально і дозволені зони звужуючись наближаються до власних значень енергії, які відповідають нескінченно глибокій потенційній ямі.

Результат пружного зіткнення фотона вільним електродом будемо описувати, користуючись виразом залежності кута розсіяння фотона, отриманим в [2].

$$\omega_1 (1 - u_1 \cos \vartheta_1) = \omega_2 (1 - u_1 \cos \vartheta_2) + \frac{\omega_1 \omega_2}{\epsilon_1} (1 - \cos \vartheta) \quad (2)$$

де $\omega_1 = h\nu_1$, $\omega_2 = h\nu_2$ - відповідно енергія фотона до і після взаємодії, $\epsilon_1 = m_1 c^2$ - енергія електрична до розсіяння, $u_1 = \frac{v_1}{c}$ - відношення швидкості електрона до швидкості світла, ϑ_1 і ϑ_2 - кути, утворені імпульсами первинного та розсіянного фотонів з напрямком первинного імпульса електрона, ϑ - кут між початковим \vec{k}_1 та кінцевим \vec{k}_2 імпульсами фотона.

Випадок нормального падіння

Нехтуючи зміною довжини хвилі фотона при зіткненні з електроном, тобто приймаючи $\lambda_1 \approx \lambda_2$, $\omega_1 \approx \omega_2$, та враховуючи, що $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ отримаємо

$$\frac{1 - \cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{\epsilon_1 v_1}{\omega} = \frac{p_1}{k_1} \quad (3)$$

де p_1 - імпульс електрона до взаємодії з фотоном.

Розподіл імпульсів в двомірній нескінченно глибокій потенціальній ямі визначається виразом [3].

$$p = \sqrt{\left(\frac{\pi n_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{a_2}\right)^2} \quad (4)$$

де n_1, n_2 - цілі числа, $n_1 = 1, 2, 3, \dots$, $n_2 = 1, 2, 3, \dots$.

Зміна імпульсу електрона визначається різницею імпульсів двох дозволених енергетичних зон. Існує також певна ймовірність, що фотон пройде крізь ґратку не зіткнувшись з електроном. Таким чином імпульс p_1 (який віддає електрон фотону) може приймати наступні значення

$$p_1 = \sqrt{\left(\frac{\pi m_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m_2}{a_2}\right)^2} \quad (5)$$

де $m_1 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, $m_2 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Одночасне перетворення в нуль $m_1 = m_2 = 0$ означає, що зіткнення не відбулось.

Враховуючи, що ліву частину (3) можна привести до вигляду $\frac{1 - \cos v}{\sin v} = \frac{\sin v}{1 + \cos v}$, а також враховуючи вираз (5) для кутів дифракції отримаємо наступний вираз

$$\frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2} \quad (6)$$

Для малих кутів дифракції

$$\sin \vartheta \approx \lambda \sqrt{\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2} \quad (7)$$

Для одновимірного ланцюжка атомів, отримаємо

$$\frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} = \frac{\lambda}{2} m a \quad (8)$$

де $m = m_1$, $a = a_1$, якщо ланцюжок атомів розміщений вздовж осі X , і $m = m_2$, $a = a_2$, коли він розміщується вздовж осі Y .

Кут дифракції v відповідно в першому випадку лежить в площині XOZ , в другому – в площині YOZ . Як витікає із рівняння (6) або (7) траєкторії розсіяних фотонів будуть лежати на поверхні конусів з кутом розкриття 2ϑ .

Довільне падіння

У випадку довільного падіння кут ковзання $\vartheta_1 \neq \frac{\pi}{2}$ і площина, в якій лежить вектор імпульсу фотона, що падає на ґратку, має довільну орієнтацію відносно ґратки (рис. 1).

В цьому випадку, користуючись співвідношеннями (2), (5), отримуємо наступне рівняння

$$\frac{\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2}{2 \sin^2 \left(\vartheta_1 + \frac{\vartheta}{2} \right)} = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2} \quad (9)$$

$$\frac{\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_1}{2 \sin^2 \left(\vartheta_1 + \frac{\vartheta}{2} \right)} = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\left(\frac{m_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{a_2}\right)^2}$$

де ϑ_1 - кут між імпульсом електрона \vec{p}_1 , який лежить на площині ґратки XOY та первинним імпульсом фотона \vec{k}_1 , ϑ_2 - кут між імпульсом електрона \vec{p}_1 та вторинним імпульсом розсіянного фотона \vec{k}_2 . Відповідно кут $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right)$ - це кут падіння фотона, кут між вектором \vec{k}_1 та віссю Z. Кут $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_2\right)$ - кут, під яким буде спостерігатися максимум освітленості, тобто кут між вектором \vec{k}_2 та віссю Z.

Відповідно кут $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right)$ - це кут падіння, кут між \vec{k}_1 та віссю Z.

Кут $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_2\right)$ - кут, під яким буде спостері

Якщо $m_2 = 0$, то фотон отримає імпульс в напрямку, який лежить в площині XOZ і із (9) отримано

$$\frac{\cos \vartheta'_1 - \cos \vartheta'_2}{\sin^2 \left(\vartheta'_1 + \frac{\vartheta'}{2} \right)} = \lambda \frac{m_1}{a_1} \quad (10)$$

В цьому випадку кути ϑ'_1 , ϑ'_2 , ϑ' будуть лежати в площині XOZ.

Якщо $m_1 = 0$, маємо

$$\frac{\cos \vartheta''_1 - \cos \vartheta''_2}{\sin^2 \left(\vartheta''_1 + \frac{\vartheta''}{2} \right)} = \lambda \frac{m_2}{a_2} \quad (11)$$

В даному випадку кути ϑ''_1 , ϑ''_2 , ϑ'' будуть знаходитись в площині YOZ.

У випадку великих значень кутів ковзання та малих значень кутів дифракції ϑ із (10), (11) можна отримати співвідношення

$$\begin{aligned} a_1 (\cos \vartheta'_1 - \cos \vartheta'_2) &= \lambda m_1 \\ a_2 (\cos \vartheta'_1 - \cos \vartheta'_2) &= \lambda m_2 \end{aligned}$$

Які збігаються із умовами, при яких відбувається підсилення коливань [4] при дифракції світла на двовимірній ґратці атомів.

Висновки

В роботі подана квантовомеханічна модель явища дифракції світла на двовимірній ґратці атомів.

Показано, що причиною відхилення від первинного напрямку руху фотонів є кружне зіткнення фотонів з вільними електродами. Кути, під якими спостерігаються

максимум підсилення світла визначаються спектром імпульсів електронів.

Література

- 1 Kronig R. de L/? Penny W.G. – Prog. Roy. Soc. 1931, v.180, p.499.
- 2 Ахнезер А.И., Берестецкий В.Б.; Квантовая электродинамика; “Наука”, 1969, изд. 3е. с. 437.
- 3 Лондау А.Д., Лифшиц Е.М.; Теоретическая физика, т. 3-м.; 1963, с.63.
- 4 Сивухин Д.В., Общий курс физики, т.4-м. “Наука”, 1985, с.307.

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА БЕСКОНЕЧНОЙ ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ АТОМОВ

А.В.Безуглый

В работе используется квантово-механический подход к описанию явления дифракции света на двумерной решетке атомов. Исходя из:

- 1) *одномерной модели движения электрона в цепочке атомов;*
- 2) *представлении взаимодействия фотона с электроном, как упругом столкновении*

получены соотношения для углов которыми должны наблюдаться дифракционные максимумы.

ON THE SCATTERING OF LIGHT BY THE TWO-DIMENSIONAL INFINITE GRATING OF ATOMS

A. V. Bezouglyi

The quantum mechanics model of the diffraction of photons on the two-dimensional infinite grating of atoms is considered. Basing on the model of the electron motion along one-dimensional atom chain and the representation of interaction between the photon and electron as elastic collision is demonstrated that diffraction pattern is determined by spectrum of momentums of electrons. Expression determining diffraction angles of scattered photons coinciding with known condition of maximum for diffraction grating in the case of small diffraction angles and big angles of sliding is obtained.